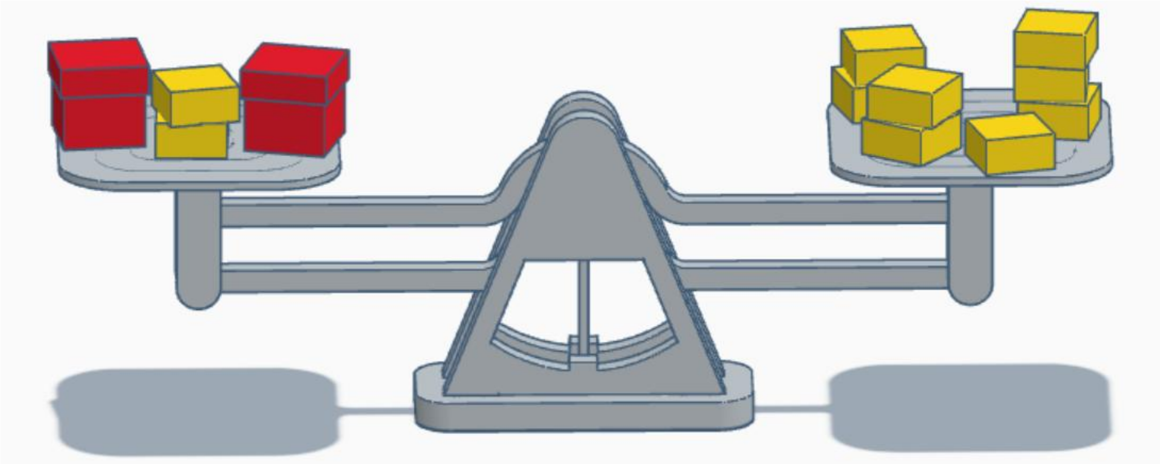
Gleichungswaage für lineare Gleichungen



- Gleichungen als Gleichgewicht verstehen
- Äquivalenzumformungen als „gleiches auf beiden Seiten“ begründen
- Übergang von Handlung → Symbolik unterstützen

Im Folgenden möchte ich einige Anwendungsbeispiele und -szenarien darstellen.

Einstieg: Material erkunden

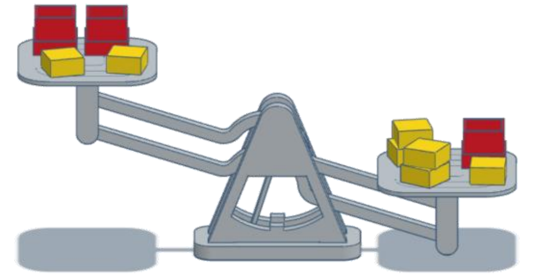
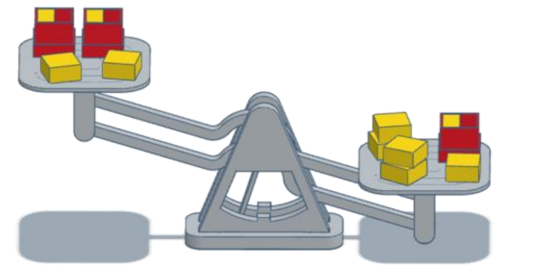
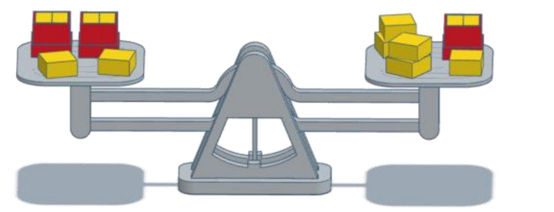
Mögliche Handlungen / Erkenntnisse:
Die SuS[1] ermitteln, dass ein leeres rotes Kästchen genauso schwer wie ein gelber Quader bzw. vier blaue Würfel ist.
Die SuS verstehen, dass man anhand der Äußerlichkeit nicht erkennen kann, ob das Kästchen so schwer wie ein, zwei oder drei gelbe Einer ist (bzw. 4 bis 12 blaue Einer).
Die SuS erkennen, dass das rote Kästchen x-Werte von 1 bis 12 repräsentieren kann.

Lineare Gleichungen durch Probieren lösen

Hierzu wird eine lineare Gleichung mit offenen roten Kästchen aufgebaut. Die roten Kästchen sind dabei zunächst alle leer. Die Waage ist dann im Ungleichgewicht[2], da der x-Wert falsch gewählt ist. Die SuS können dann schrittweise den x-Wert ändern, bis die Waage ins Gleichgewicht kommt.

[1] SuS = Schülerinnen und Schüler
[2] außer bei x = 1 (gelbe Einer) bzw. x = 4 (blaue Einer)

Beispiel (2x + 2 = x + 5):

1		Die SuS erkennen, dass x = 1 nicht korrekt sein kann, da die Waage ein Ungleichgewicht anzeigt. Lösungsvorschlag: x um eins erhöhen (siehe Bild 2)
2		Die SuS erkennen, dass x = 2 auch nicht die korrekte Lösung sein kann. Lösungsvorschlag: x erneut um eins erhöhen (siehe Bild 3)
3		Die SuS erkennen, dass die Gleichgewichtsbedingung nun erfüllt ist. Die korrekte Lösung der Gleichung ist gefunden (x = 3).

Man kann im obigen Beispiel natürlich auch direkt x = 3 ausprobieren und so direkt zum Erfolg kommen. Es ist durchaus erwünscht, dass die SuS sich Gedanken machen und geschickt probieren, vielleicht im Kopf schon Einer oder ein x subtrahieren. Das ist dann ja genau das, was den Übergang in die rein symbolische Darstellungsart erleichtert.

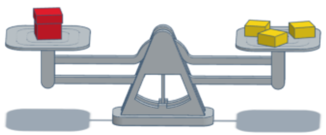
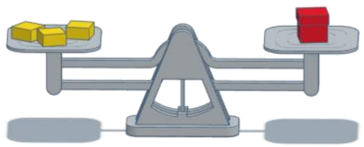
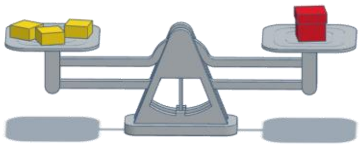
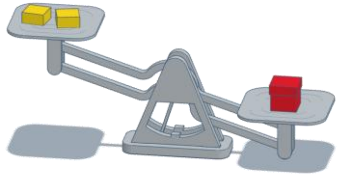
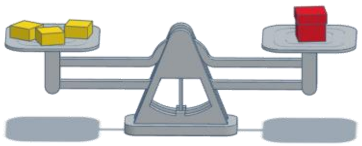
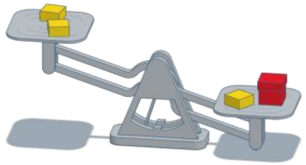
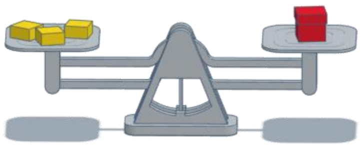
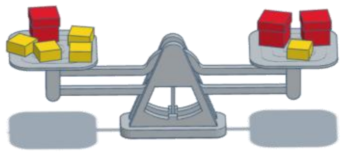
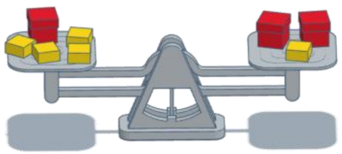
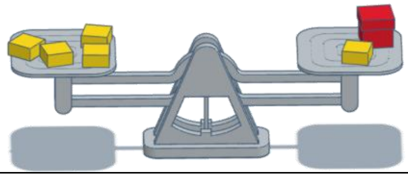
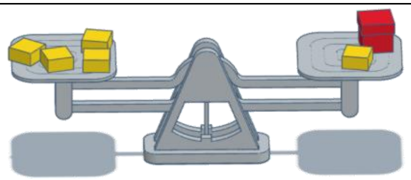
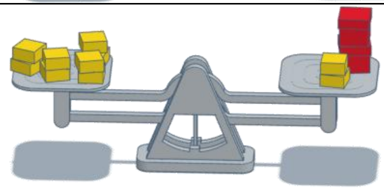
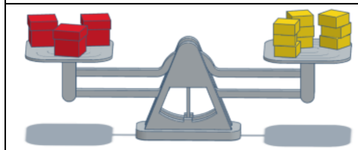
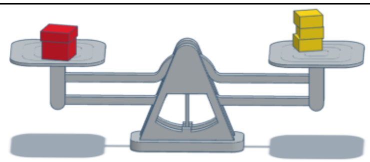
Viele verschiedene Gleichungen können die SuS auf diese Weise selbstständig handelnd lösen. Wichtig für die SuS: In einer Gleichung kann x immer nur einen Wert annehmen (die roten Kästchen dürfen nicht unterschiedlich beladen werden).
Wichtig für die Lernbegleitung: Nicht jede beliebige Gleichung lässt sich mit diesem Material-Setup lösen, da x nur bestimmte diskrete Werte annehmen kann. Bei Verwendung von gelben Einern muss die Lösung 1, 2 oder 3 sein. Bei den blauen Einern muss die Lösung eine ganze Zahl zwischen 4 und 12 sein (Ausnahme: siehe Seite 5 „10-Cent-Trick“).
Die Gleichung muss also durch die Lernbegleitung vorgegeben werden und gewisse Kriterien erfüllen. Trotzdem lassen sich sehr viele mögliche Übungsaufgaben konstruieren. Hier eine kleine Auswahl:
2x = 6 (gelbe Einer / x = 3)
3x = 6 (gelbe Einer / x = 2)
2x = 14 (blaue Einer / x = 7)
8 = x + 5 (gelbe Einer / x = 3)
x + 3 = 2x + 1 (gelbe Einer / x = 2)
5x + 3 = 3x + 9 (gelbe Einer / x = 3)
4x + 3 = x + 21 (blaue Einer / x = 6)
usw. usw.
Im Anhang findet sich ein Kartendeck mit insgesamt 36 Beispielaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit, das für diesen Übungstyp eingesetzt werden kann.

Lineare Gleichungen erstellen lassen

Die SuS können selbstständig Gleichungen entwickeln. Diese können notiert und selbstständig überprüft werden.
Die SuS gehen dabei folgendermaßen vor: Zunächst legt jede(r) Schüler(in) den Wert für x fest und belädt eine ausreichende Menge roter Kästchen entsprechend mit gelben oder blauen Einern. Anschließend belädt sie bzw. er die Waage. Dabei ist es zweckmäßig, immer im Gleichgewicht bleibend sukzessive die Waage immer weiter zu beladen, damit man nicht den Überblick verliert.
Bei Verwendung der blauen Einer ist zu beachten, dass bei insgesamt großen Massen Unterschiede (also Fehler) von nur einem Einer u.U. recht schwierig abzulesen sind.
Anschließend notiert die Schülerin bzw. der Schüler seine Gleichung und führt eine rechnerische Probe mit dem gewählten x-Wert durch.

Äquivalenzumformungen

Alle Äquivalenzumformungen in diesem Themenkomplex lassen sich darstellen. Man startet jeweils in einem Gleichgewichtszustand und überlegt, was man verändern darf, ohne die Waage aus dem Gleichgewicht zu bringen.
Die SuS erkennen, dass die Massen auf den Waagschalen immer in gleicher Weise verändert werden müssen. Das ist eine sehr grundlegende Erkenntnis, aber in ihrer Relevanz nicht zu unterschätzen. Man erkennt nämlich z. B. auch, dass „Rüberbringen“ nichts bringt: Beim „Rüberbringen“ wird die Gleichgewichtsbedingung verletzt: Man verkleinert die eine Masse und vergrößert die andere. Die einzelnen Aktionen sollten jeweils für unterschiedliche Anfangszustände getestet werden. Die Bewertung kann man je nach Abstraktionsvermögen der SuS zunächst auf die Waage bezogen formulieren lassen und u.U. dann erst in einem zweiten Schritt auf Gleichungen beziehen. In folgender Tabelle finden sich einige zweckmäßige Beispiele:

Ausgangszustand	Aktion	Endzustand	Bewertung durch SuS
	Massen der Waagschalen tauschen		Die Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn die Massen getauscht werden.
	Auf einer Seite wegnehmen		Das darf man nicht.
	Rüberbringen		Das darf man nicht.
	Auf beiden Seiten dazulegen		Die Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn auf beiden Seiten **gleich viel** dazugelegt wird.
	Auf beiden Seiten wegnehmen		Die Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn auf beiden Seiten **gleich viel** weggenommen wird.
	Auf beiden Seiten verviel-fachen		Die Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn **beide Seiten** verdoppelt werden (verdreifacht, vervier-facht usw.).
	Auf beiden Seiten teilen		Die Waage bleibt im Gleichgewicht, wenn auf beiden Seiten **durch dieselbe Zahl** geteilt wird.

Weitere ungültige Umformungen lassen sich natürlich ergänzen (z. B. nur eine Seite vervielfachen / teilen)

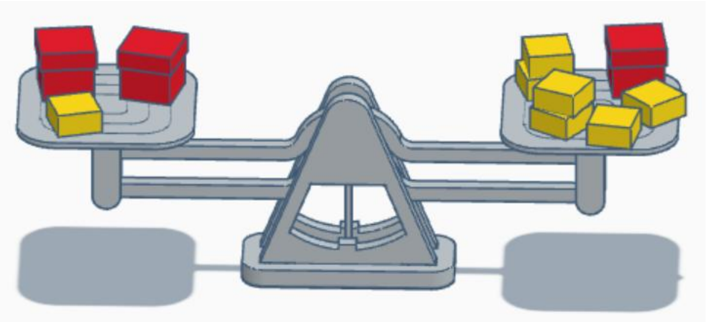
Lineare Gleichungen lösen

Die SuS können selbstständig entwickelte Gleichungen von einem Partner lösen lassen.
Die parallel arbeitenden SuS gehen dabei folgendermaßen vor: Zunächst legt jede(r) Schüler(in) für sich den Wert für x fest und belädt eine ausreichende Menge roter Kästchen entsprechend mit gelben oder blauen Einern. Anschließend belädt sie bzw. er die Waage.
Dann wechseln die beiden SuS den Sitzplatz und lösen wechselseitig die Gleichung.
Alternativ können die Karten aus dem Anhang für diesen Übungstyp verwendet werden. Die Lernbegleitung stellt die Gleichung entsprechend auf der Waage dar (ggf. unter Zuhilfenahme der Lösung) und die Schülerin bzw. der Schüler löst die Aufgabe anschließend.

10-Cent-Trick

Abschließend noch ein kleiner Trick. Dieser lässt sich ideal in einer Lehrerdemonstration im Unterrichtsgespräch verwenden. Bei der Verwendung der gelben Einer kann es dazu kommen, dass SuS beginnen zu raten (es muss ja $x = 1$ oder $x = 2$ oder $x = 3$ sein). Hier kann man dann in den roten Kästchen 10-Cent-Münzen anstelle der gelben Einer verwenden. Ein 10-Cent-Münze wiegt exakt so viel wie ein gelber Quader. So ist es dann möglich, größere x-Werte zu generieren, obwohl sichtbar nur gelbe Einer verwendet wurden.

Beispiel:



$2x + 1 = x + 6 \Rightarrow x = 5$

(In jedem roten Kästchen sind vier 10-Cent-Münzen.)

Bestellung der Gleichungswaage

Details zur Bestellung finden sich auf https://einfach-schule.com .

Erstellt von:
Matthias Gellink, Nordhorn, 2025

Anhang

Kartenset
Für den beidseitigen Ausdruck (ggf. laminieren) → Karten mit Lösung auf der Rückseite
Hinweis: Die Lösungen sind aus drucktechnischen Gründen gespiegelt angeordnet. Bitte nicht wundern.

2x = 4
nutze die gelben Einer

2x = 6
nutze die gelben Einer

3x = 6
nutze die gelben Einer

3x = 9
nutze die gelben Einer

4x = 8
nutze die gelben Einer

4x = 12
nutze die gelben Einer

2x = 10
nutze die blauen Einer

2x = 12
nutze die blauen Einer

2x = 14
nutze die blauen Einer

$x = 2$	$x = 3$	$x = 2$
$x = 3$	$x = 2$	$x = 3$
$x = 7$	$x = 6$	$x = 5$

☆☆

2x + 3 = 7

nutze die gelben Einer

☆☆

2x + 4 = 10

nutze die gelben Einer

☆☆

3x + 5 = 11

nutze die gelben Einer

☆☆

3x + 2 = 11

nutze die gelben Einer

☆☆

4x + 1 = 9

nutze die gelben Einer

☆☆

4x + 2 = 14

nutze die gelben Einer

☆☆

2x + 2 = 12

nutze die blauen Einer

☆☆

2x + 3 = 15

nutze die blauen Einer

☆☆

2x + 3 = 17

nutze die blauen Einer

$x = 2$	$x = 3$	$x = 2$
$x = 3$	$x = 2$	$x = 3$
$x = 7$	$x = 6$	$x = 5$

$3x + 3 = x + 7$

nutze die gelben Einer

$5x + 1 = 3x + 7$

nutze die gelben Einer

$4x + 5 = 2x + 9$

nutze die gelben Einer

$4x + 2 = x + 11$

nutze die gelben Einer

$5x + 1 = 2x + 7$

nutze die gelben Einer

$5x + 1 = 2x + 10$

nutze die gelben Einer

$5x + 2 = 2x + 17$

nutze die blauen Einer

$5x + 3 = 2x + 21$

nutze die blauen Einer

$4x + 3 = x + 24$

nutze die blauen Einer

$x = 2$	$x = 3$	$x = 2$
$x = 3$	$x = 2$	$x = 3$
$x = 7$	$x = 6$	$x = 5$

☆

$x + 3 = 5$

nutze die gelben Einer

☆

$x + 4 = 7$

nutze die gelben Einer

☆

$x + 5 = 7$

nutze die gelben Einer

☆☆

$3x + 2 = 2x + 5$

nutze die gelben Einer

☆☆

$3x + 1 = 2x + 3$

nutze die gelben Einer

☆☆

$4x + 3 = 3x + 6$

nutze die gelben Einer

☆☆

$2x + 2 = x + 7$

nutze die blauen Einer

☆☆

$2x + 3 = x + 9$

nutze die blauen Einer

☆☆

$2x + 3 = x + 10$

nutze die blauen Einer

$x = 2$	$x = 3$	$x = 2$
$x = 3$	$x = 2$	$x = 3$
$x = 7$	$x = 6$	$x = 5$